UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 930 A

Nombre: ________________________________

Carnet: _______________ Sección: ______

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1.

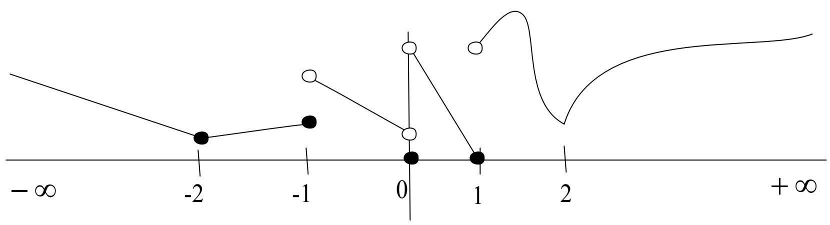
a) Sean f y g dos funciones tales que:

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -3$ $\quad y \quad$ $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 5$

Hallar $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)g(x)}{g(x)+1}$, indicando las propiedades utilizadas.

b) Definir formalmente $\lim\limits_{x\to c^-} g(x) = L$

c) Indicar los intervalos de continuidad, según la gráfica indicada a continuación



(1 Pto c/u)

d) Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2(x)}{x}$

e) Sabiendo que $|g(x)| < (x-3)^2$, para $x \neq 3$.
Hallar $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$

2. Hallar los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\tan(x)}$ (3 Ptos)

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{sen(x-2)\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}$ (3 Ptos)

c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2-h)^3-8}{h}$ (4 Ptos)

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}$ (4 Ptos)

3. Dada la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} x+a & si \quad x<2 \\ x^2-3x+1 & si \quad 2 \le x < 4 \\ \dfrac{x+1-b}{x-2} & si \quad x \ge 4 \end{cases}$ (6 Ptos)

Hallar los valores de a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$

4.

a) Enunciar el Teorema del valor intermedio. (2 Ptos)

b) Probar que existe un $c \in (3,4)$, tal que: $f(c) = g(c)$, donde $f(x) = x^3+1$ y $g(x) = 4x^2-1$ (3 Ptos)

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 930 A

Nombre: ______________________________

Carnet: ______________ Sección: ______

1.

a) Sean f y g dos funciones tales que: $\lim_{x\to 3} f(x) = -3$ y $\lim_{x\to 3} g(x) = 5$

Hallar $\lim_{x\to 3} \dfrac{f(x)g(x)}{g(x)+1}$, indicando las propiedades utilizadas.

Solución:

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)g(x)}{g(x)+1} = \frac{\lim_{x\to 3}\left(f(x)g(x)\right)}{\lim_{x\to 3}\left(g(x)+1\right)}$$

$$= \frac{\left(\lim_{x\to 3} f(x)\right)\left(\lim_{x\to 3} g(x)\right)}{\left(\lim_{x\to 3} g(x)\right)+1}$$

$$= \frac{(-3)\,.\,5}{5+1} = -\frac{5}{2}$$

b) Definir formalmente $\lim_{x\to c^-} g(x) = L$

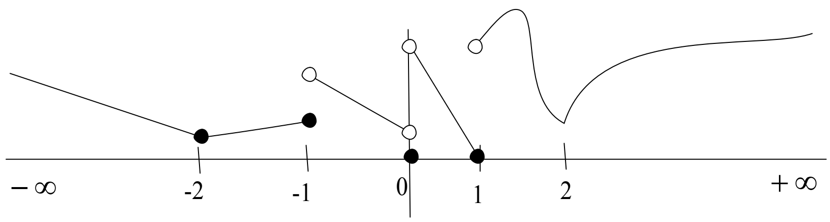
Solución:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, talque:$

$0 < c - x < \delta \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$

(1 Pto c/u)

c) Indicar los intervalos de continuidad, según la gráfica indicada a continuación



Solución:

La función es continua en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

d) Hallar $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^2(x)}{x}$

Solución:

$$\frac{\tan^2(x)}{x} = \frac{sen^2(x)}{x\cos^2(x)} = \frac{sen(x)}{x} sen(x) \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Luego:

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 930 A

Nombre: ______________________________

Carnet: _______________ Sección: ______

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\,sen(x)\frac{1}{\cos^2(x)}\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} sen(x)\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2(x)}\right)$$

$$=1\ .\ 0\ .\ 1=0$$

e) Sabiendo que $|g(x)|<(x-3)^2$, para $x\neq 3$.

Hallar $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$

Solución:

$$|g(x)|<(x-3)^2 \Leftrightarrow -(x-3)^2<g(x)<(x-3)^2$$

Como $\lim\limits_{x\to 3}\left(-(x-3)^2\right)=0=\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^2$, entonces por el teorema del emparedado

$$\lim_{x\to 3} g(x)=0$$

2. Hallar los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{\tan(x)}$ (3 Ptos)

Solución:

$$\frac{1-\cos(x)}{\tan(x)}$$

$$=\cos(x)\frac{(1-\cos(x))}{sen(x)}\frac{(1+\cos(x))}{(1+\cos(x))}$$

$$=\cos(x)\frac{(1-\cos^2(x))}{sen(x)(1+\cos(x))}$$

$$=\cos(x)\frac{sen^2(x)}{sen(x)(1+\cos(x))}$$

$$=\cos(x)\frac{sen(x)}{(1+\cos(x))}$$

Luego:

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{sen(x-2)\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}$ (3 Ptos)

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\frac{sen(x-2)\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}$$

$$=\left(\lim_{x\to 2}\frac{sen(x-2)}{x-2}\right)\left(\lim_{x\to 1}\sqrt{(x-2)^2}\right)$$

$$=1\ .\ 0=0$$

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 930 A

Nombre: ______________________

Carnet: ______________ Sección: ______

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\tan(x)}$ $= \lim\limits_{x\to 0}\left(\cos(x)\frac{sen(x)}{(1+\cos(x))}\right)$ $= \lim\limits_{x\to 0}(\cos(x))\frac{\lim\limits_{x\to 0} sen(x)}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos(x))}$ $=1 \ . \ \frac{0}{2}=0$	
c) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(2-h)^3-8}{h}$ (4 Ptos) **Solución:** $\frac{(2-h)^3-8}{h}=\frac{8-12h+6h^2-h^3-8}{h}$ $=\frac{-12h+6h^2-h^3}{h}=-12+6h-h^2$ Luego: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2-h)^3-8}{h}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-12+6h-h^2\right)$ $=-12$	d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}$ (4 Ptos) **Solución:** $\frac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}=\frac{\left(\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x}\right)}{\left(\frac{4x+1}{x}\right)}=\frac{\left(\sqrt{\frac{x^2+4x}{x^2}}\right)}{\left(\frac{4x+1}{x}\right)}$ $=\frac{\left(\sqrt{1+4\frac{1}{x}}\right)}{\left(4+\frac{1}{x}\right)}$ Luego: $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\left(\sqrt{1+4\frac{1}{x}}\right)}{\left(4+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{4}$

3. Dada la función f definida por: $f(x)=\begin{cases} x+a & si \quad x<2 \\ x^2-3x+1 & si \quad 2\le x<4 \\ \frac{x+1-b}{x-2} & si \quad x\ge 4 \end{cases}$

Hallar los valores de a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$ (6 Ptos)

Solución:

3.1.- f es continua en $(-\infty,2)$, ya que es un polinomio.
f es continua en $(2,4)$, ya que es un polinomio.
f es continua en $(4,+\infty)$, ya que es una función racional.

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 930 A

Nombre: ______________________________

Carnet: ______________ Sección: ______

3.2.- Continuidad en $x = 2$, $\left(\underset{x\to 2}{Lim} f(x) = f(2) \right)$

3.2.1.- $f(2) = 2^2 - 3 \,.\, 2 + 1 = -1$

3.2.2.- $\underset{x\to 2}{Lim} f(x)$

$\underset{x\to 2^-}{Lim} f(x) = \underset{x\to 2^-}{Lim} (x + a) = 2 + a$

y $\underset{x\to 2^+}{Lim} f(x) = \underset{x\to 2^+}{Lim} (x^2 - 3x + 1) = -1$,

Luego el limite existe si se satisface: $2 + a = -1 \Leftrightarrow a = -3$

Por lo tanto f es continua en $x = 2$, si se satisface: $a = -3$

3.3.- Continuidad en $x = 4$, $\left(\underset{x\to 4}{Lim} f(x) = f(4) \right)$

3.3.1.- $f(4) = \dfrac{4 + 1 - b}{4 - 2} = \dfrac{5 - b}{2}$

3.3.2.- $\underset{x\to 4}{Lim} f(x)$

$\underset{x\to 4^-}{Lim} f(x) = \underset{x\to 4^-}{Lim} (x^2 - 3x + 1) = 5$

y $\underset{x\to 4^+}{Lim} f(x) = \underset{x\to 4^+}{Lim} \left(\dfrac{x + 1 - b}{x - 2} \right) = \dfrac{5 - b}{2}$

Luego el limite existe si se satisface: $5 = \dfrac{5 - b}{2} \Leftrightarrow b = -5$

Por lo tanto f es continua en $x = 4$, si se satisface: $b = -5$

f es continua en todo $\mathbb{R}$, si se toman los valores $a = -3$ y $b = -5$

4\.

(2 Ptos)

a) Enunciar el Teorema del valor intermedio.

Solución:

Sea h una función continua en el intervalo $[a, b]$ y sea un w un valor entre $h(a)$ y $h(b)$, entonces existe un $c \in (a, b)$, talque: $h(c) = w$

b) Probar que existe un $c \in (3,4)$, tal que: $f(c) = g(c)$, donde $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = 4x^2 - 1$

Solución:

(3 Ptos)

Considere $h(x) = f(x) - g(x)$

$f(3) = 28$, $f(4) = 65$, $g(3) = 35$, $g(4) = 63$ $\Rightarrow$ $h(3) = -7$, $h(4) = 2$,

como $h(3) < 0 < h(4)$ y la función h es continua en $[3,4]$, se puede aplicar el teorema del valor intermedios y en consecuencia, existe un $c \in (3,4)$, talque: $h(c) = 0$, lo que es equivalente a decir: existe un $c \in (3,4)$, talque: $f(c) = g(c)$

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado